Лабораторно-практическая работа №1
по линейной алгебре «Операции с матрицами»

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ

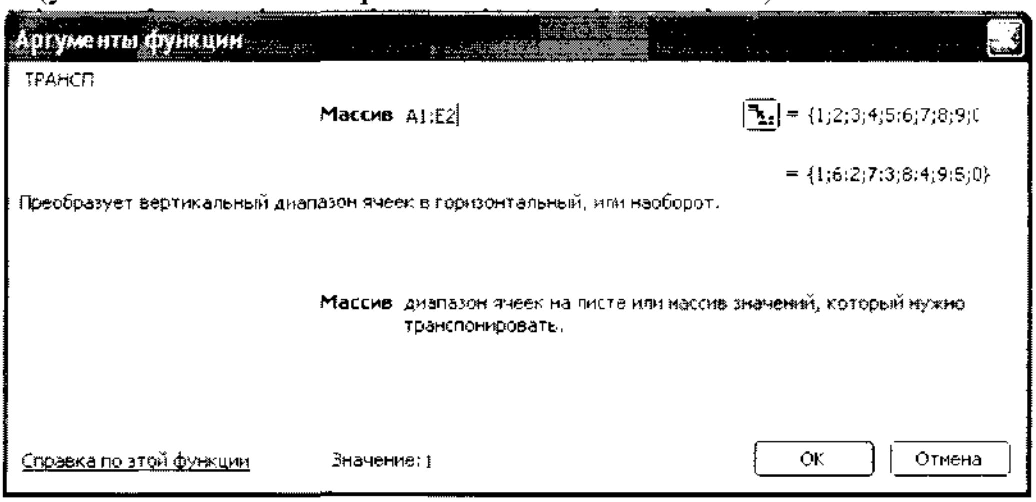
Транспонированной называется матрица (A^T), в которой столбцы исходной матрицы (A) заменяются строками с соответствующими номерами.
В сокращенной записи, если $A = (a_{ij})$, то $A^T = (a_{ji})$.

Для осуществления транспонирования в Excel используется функция **ТРАНСП**, которая позволяет поменять ориентацию массива на рабочем листе с вертикальной на горизонтальную и наоборот.

Получить транспонированную матрицу для матрицы размера 2 х 5:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Введите в диапазон ячеек A1:E2 значения матрицы A, размера 2 х 5.
2. Выделите блок ячеек под транспонированную матрицу (5 х 2). Например, A4:B8.
3. Нажмите на панели инструментов *Стандартная* кнопку *Вставка функции* ***(f_x)***.
4. В появившемся диалоговом окне *Мастер функций* в рабочем поле *Категория* выберите *Ссылки и массивы*, а в рабочем поле *Функция* - имя функции **ТРАНСП**. После этого щелкните на кнопке **ОК**.
5. Появившееся диалоговое окно *ТРАНСП* мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы A1:E2 в рабочее поле *Массив* (указателем мыши при нажатой левой кнопке).



После чего нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**.

6. Если транспонированная матрица не появилась в диапазоне A4:B8, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие **CTRL+SHIFT+ENTER.** В результате в диапазоне A4:B8 появится транспонированная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Лабораторно-практическая работа №2 по линейной алгебре «Операции с матрицами»

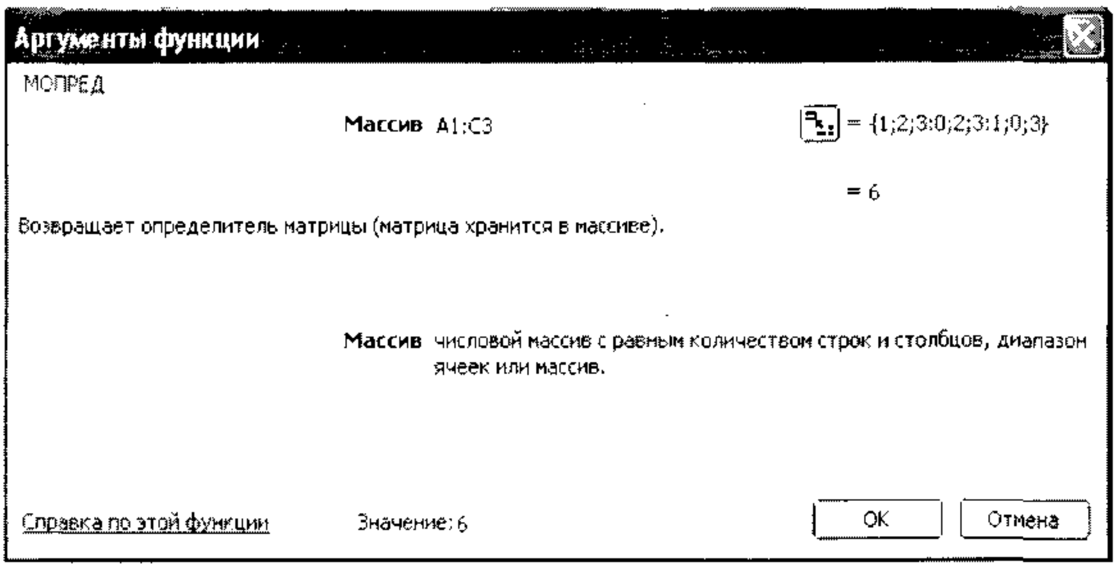
ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Определитель матрицы — это число, вычисляемое на основе значений элементов массива. Определитель матрицы A обозначается как $|A|$ или Δ..

В MS Excel для вычисления определителя квадратной матрицы используется функция **МОПРЕД**.

Вычислить определитель матрицы: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1. Введите диапазон ячеек A1:C3 значения матрицы A.
2. Курсор поставьте в ячейку, в которой требуется получить значение определителя, например, в A4.
3. Нажмите на панели инструментов *Стандартная* кнопку *Вставка функции.*
4. В появившемся диалоговом окне *Мастер функций* в рабочем поле *Категория* выберите *Математические*, а в рабочем поле *Функция* — имя функции **МОПРЕД**. После этого щелкните на кнопке **OK**.
5. Появившееся диалоговое окно **МОПРЕД** мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы A1:C3 в рабочее поле *Массив* (указателем мыши при нажатой левой кнопке).



6. Нажмите кнопку **OK**.

   В ячейке A4 появится значение определителя матрицы — **6**.

Лабораторно-практическая работа №3
по линейной алгебре «Операции с матрицами»

НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

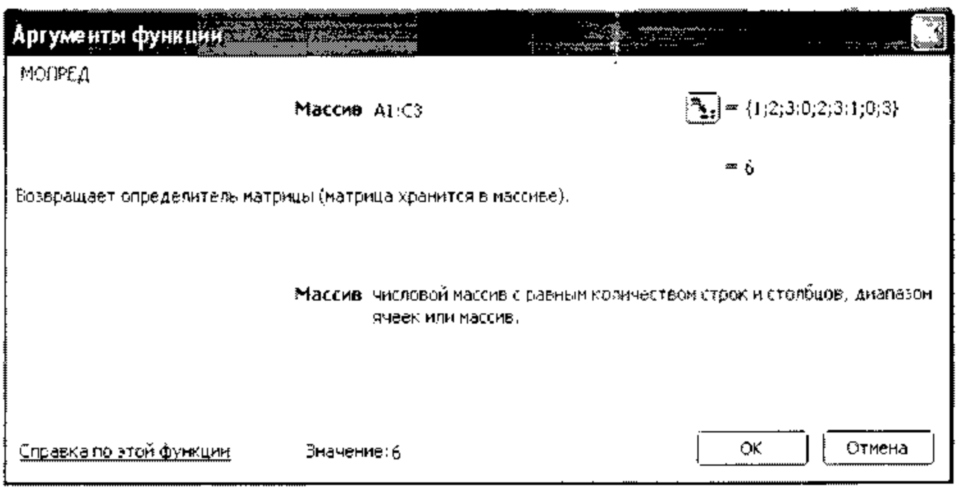
Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как слева, так и справа получается единичная матрица: $\boldsymbol{A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E}$.

Необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы является невырожденность исходной матрицы. Матрица называется невырожденной или неособенной, если ее определитель отличен от нуля ($|A| \neq 0$); в противном случае (при $|A| = 0$) матрица называется вырожденной или особенной.

В MS Excel для нахождения обратной матрицы используется функция **МОБР**.

Получит обратную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Введите в диапазон ячеек A1:C3 значения матрицы A.
2. Выделите блок ячеек под обратную матрицу, например, блок ячеек A5:C7.
3. Нажмите на панели инструментов *Стандартная* кнопку *Вставка функции*. В появившемся диалоговом окне *Мастер функций* в рабочем поле *Категория* выберите *Математические*, а в рабочем поле *Функция* — имя функции **МОБР**.
4. Щелкните на кнопке **ОК**.
5. Появившееся диалоговое окно **МОБР** мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы A1:C3 в рабочее поле *Массив*.



6. Нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**.
7. Если обратная матрица не появилась в диапазоне A5:C7, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие **CTRL+SHIFT+ENTER**. В результате в диапазоне A5:C7 появится обратная матрица:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ -0{,}33333 & 0{,}33333 & 0{,}33333 \end{bmatrix}$$

Лабораторно-практическая работа №4
по линейной алгебре «Операции с матрицами»

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МАТРИЦ

Складывать (вычитать) можно матрицы одного размера. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ (то есть матрицы складываются поэлементно). Аналогично определяется разность двух матриц $C = A - B$.

В MS Excel для выполнения операций суммирования и вычитания матриц могут быть использованы формулы, вводимые в соответствующие ячейки.

Найти матрицу С, являющуюся суммой матриц $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & -1 & 13 \end{bmatrix}$ **и** $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 5 & 19 & 31 \end{bmatrix}$.

1. Введите значения матрицы А в диапазон ячеек A1:C2, а значения матрицы B – в диапазон ячеек A4:C5.
2. Курсор установите в левый верхний угол результирующей матрицы, например в A7.
3. Введите формулу для вычисления первого элемента результирующей матрицы **=A1+A4** (предварительно установив английскую раскладку клавиатуры).
4. Скопируйте введенную формулу в остальные ячейки результирующей матрицы: установите курсор в ячейку A7; наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки, так чтобы указатель мыши принял вид тонкого крестика; при нажатой левой кнопке мыши протяните указатель до ячейки C7; затем так же протяните указатель мыши до ячейки C8.
5. В результате в ячейках A7:C8 появится матрица, равная сумме исходных матриц.

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 14 & 18 & 44 \end{bmatrix}$$

Подобным же образом вычисляется разность матриц, только в формуле для вычисления первого элемента вместо знака **+** ставится знак **-**.

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 10 \\ 4 & -20 & -18 \end{bmatrix}.$$

Лабораторно-практическая работа №5
по линейной алгебре «Операции с матрицами»

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО

Произведением матрицы A на число k называется матрица B = kA, элементы которой $b_{ij} = k\, a_{ij}$ для i= 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ...,n. Иначе говоря, при умножении матрицы на постоянную каждый элемент этой матрицы умножается на эту постоянную: $k*A_{ij} = (k*a_{ij})$

В MS Excel для выполнения операции умножения матрицы на число могут быть использованы формулы, вводимые в соответствующие ячейки.

Получить матрицу C = 3*A, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & -1 & 13 \end{bmatrix}$.

1. Введите значения матрицы A в диапазон ячеек A1:C2.
2. Курсор поставьте в левый верхний угол результирующей матрицы, например в E1.
3. Введите формулу для вычисления первого элемента результирующей матрицы **=3*A1** (предварительно установив английскую раскладку клавиатуры).
4. Скопируйте введенную формулу в остальные ячейки результирующей матрицы: поставьте курсор в ячейку E1; наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки, так чтобы указатель мыши принял вид тонкого крестика; при нажатой левой кнопке мыши протяните указатель до ячейки G1; таким же образом протяните указатель мыши до ячейки G2.
5. В результате в ячейках E1:G2 появится матрица, равная исходной матрице, умноженной на постоянную величину **3**:

$$3 * A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 21 \\ 27 & -3 & 39 \end{bmatrix}$$

Лабораторно-практическая работа №6
по линейной алгебре «Операции с матрицами»

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Произведение матриц определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

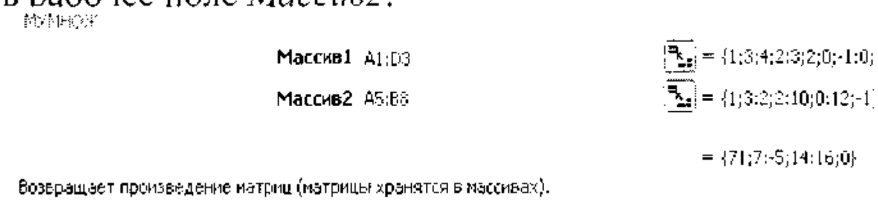
Пусть $A = (a_{ij})m \times n$, $B = (b_{ij})\ n \times p$, *тогда размерность произведения* $A \times B$ *равна* $m \times p$. *При этом матрица* C *(размера* $m \times p$*) называется произведением матриц* A *и* B, *если каждый ее элемент* c_{ij} *равен сумме произведений элементов* i*-й строки матрицы* A *на соответствующие элементы* j*-го столбца матрицы* B:

$$c_{ij} = a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + \ldots + a_{ip}\,b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\,,\ \ i=1,2,\ldots m;\ \ j=1,2,\ldots n.$$

Найти матрицу С, являющуюся произведением матриц А и В:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 10 & 0 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Введите значения матрицы А в диапазон A1:D3, а значения матрицы B — в диапазон A5:B8.
2. Выделите блок ячеек под результирующую матрицу. Для этого требуется найти размер матрицы-произведения. Ее размерность будет $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$, в данном примере 3 х 2. Например, выделите блок ячеек F1:G3 (указателем мыши при нажатой левой кнопке).
3. Нажмите на панели инструментов *Стандартная* кнопку *Вставка функции*.
4. В появившемся диалоговом окне *Мастер функций* в поле *Категория* выберите *Математические*, а в поле *Функция* — имя функции **МУМНОЖ**. После этого щелкните на кнопке **ОК**.
5. Появившееся диалоговое окно **МУМНОЖ** мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц и введите диапазон исходной матрицы А - A1:D3 в рабочее поле *Массив 1* (указателем мыши при нажатой левой кнопке), а диапазон матрицы В – A5:B8 введите в рабочее поле *Массив2*:



6. После этого нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER.**
7. Если произведение матриц А и В не появилось в диапазоне F1:G3, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и еще раз нажать комбинацию клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**. В результате в диапазоне F1:G3 появится произведение матриц:

$$C = A * B = \begin{bmatrix} 71 & 17 \\ -5 & 14 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$$

Лабораторно-практическая работа №7
по линейной алгебре «Решение систем линейных уравнений»

СИСТЕМА n ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ

*Системой **n** линейных уравнений с **n** неизвестными в нормальной форме называется система вида:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Решением этой системы называется такая совокупность n чисел ($x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, …… $x_n = k_n$), при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений совместна, если она имеет хотя бы одно решение и несовместна, если она не имеет решений. Если совместная система имеет единственное решение, она называется определенной; система называется неопределенной – если имеет более одного решения. Две системы уравнений являются эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений

Систему (1) можно записать в виде матричного уравнения: ***A* x *X* = *B***,

где ***A*** – матрица системы: $A = \begin{bmatrix} a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1n} \\ a_{21}; a_{22}; \dots; a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}; a_{n2}; \dots; a_{nn} \end{bmatrix}$; ***X*** – *матрица-столбец (вектор) неизвестных:* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$; ***B*** – *матрица-столбец (вектор) свободных членов:* $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$.

В развернутом виде система (1) может быть представлена следующим образом:

$$\begin{bmatrix} a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1n} \\ a_{21}; a_{22}; \dots; a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}; a_{n2}; \dots; a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Существует ряд методов решения системы (1), ориентированных на вычисления вручную: методы Крамера, Гаусса и т.д. В MS Excel наиболее целесообразно рассмотреть решение этой системы методом обратной матрицы.

Рассмотрим решение системы: $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40. \end{cases}$

1. Введите матрицу A (в данном случае размера 2 х 2) в диапазон A1:B2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Вектор $B = (7 \quad 40)$ введите в диапазон C1:C2.

2. Найдите обратную матрицу A^{-1}. Для этого:
   - ✓ выделите блок ячеек под обратную матрицу (например, A3:B4);
   - ✓ на панели инструментов *Стандартная* нажмите кнопку *Вставка функции*;
   - ✓ выберите *математическую* категорию, функцию – **МОБР, ОК;**
   - ✓ в рабочее поле *Массив* введите диапазон исходной матрицы – A1:B2;
   - ✓ нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER;**
   - ✓ если обратная матрица не появилась в диапазоне A3:B4, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и еще раз нажать комбинацию клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**. В результате в диапазоне A3:B4 появится обратная матрица:

$$\begin{bmatrix} 0.217391 & 0.086957 \\ 0.173913 & -0.13043 \end{bmatrix}.$$

3. Умножением обратной матрицы A^{-1} на вектор B найдите вектор X. для этого:
   - ✓ выделите блок ячеек под результирующую матрицу (под вектор X).Ее размерность будет m **х** p, в данном случае 2 х 1. Например, выделите блок ячеек C3:C4;
   - ✓ с помощью Мастера функций вызовите функцию **МУМНОЖ**, щелкните **ОК**;
   - ✓ в рабочее поле *Массив1* введите диапазон обратной матрицы A^{-1}, а в рабочее поле *Массив2* – диапазон матрицы B;
   - ✓ нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**;
   - ✓ если вектор X не появился в диапазоне C3:C4, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие **CTRL+SHIFT+ENTER**

Можно осуществить проверку найденного решения. Для этого найденный вектор X *необходимо подставить в исходное матричное уравнение* A **x** $X = B$.

Проверка осуществляется следующим образом:

1. Выделите блок ячеек под вектор B. Например, блок ячеек D1:D2.
2. С помощью Мастера функций вызовите функцию **МУМНОЖ**, щелкните **ОК**;
3. В рабочее поле *Массив1* введите диапазон исходной матрицы A – A1:B2, а в рабочее поле *Массив2* – диапазон матрицы X – C3:C4;
4. Нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**;
5. Если вектор B не появился в диапазоне D1:D2, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие **CTRL+SHIFT+ENTER.**

В результате в диапазоне D1:D2 появится вектор B, и, если система решена правильно, появившийся вектор будет равен исходному $B = (7 \quad 40)$.

Лабораторно-практическая работа №8
по линейной алгебре «Решение систем линейных уравнений»

СИСТЕМА m ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ

*Система **m** линейных уравнений с **n** неизвестными имеет вид:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

и может быть представлена в матричном виде: **A x X = B**.

Возможны следующие три случая: **m< n, m = n** *и* **m> n.**

При **m< n,** *если система* **m** *линейных уравнений с* **n** *неизвестными является совместной, то она не определена и имеет бесконечное множество решений.*

В случае, если **m> n** *и система является совместной, то матрица* **A** *имеет по крайней мере* **m – n** *линейно зависимых строк. Здесь решение может быть получено отбором* **n** *любых линейно независимых уравнений (если они существуют) и применением формулы* $\boldsymbol{X=A^{-1}xB}$*. При этом полученное решение будет удовлетворять и остальным* **m – n** *уравнениям.*

Решая эти системы уравнений в MS Excel удобнее использовать более общий подход – метод наименьших квадратов. Для этого обе части матричного уравнения системы **A x X =B** *умножаются слева на транспонированную матрицу системы* A^T*:* $\boldsymbol{A^TAX = A^TB}$*, затем обе части уравнения умножаются слева на матрицу* $(A^TA)^{-1}$*. Если эта матрица существует, то система определена. С учетом того, что* $(A^TA)^{-1}*(A^TA)= E$*, получаем* $X = (A^TA)^{-1} A^TB$*. Это уравнение является решением системы* **m** *линейных уравнений с* **n** *неизвестными при* **m> n.**

Рассмотрим решение системы: $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$

1. Введите матрицу A (в данном случае размера 3 х 2) в диапазон A1:B3 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Вектор $\boldsymbol{B} = (7 \quad 40 \quad 3)$ введите в диапазон C1:C3.

2. Найдите транспонированную матрицу A^T. Для этого:
   - ✓ выделите блок ячеек под транспонированную матрицу;
   - ✓ на панели инструментов *Стандартная* нажмите кнопку *Вставка функции*;
   - ✓ выберите *математическую* категорию, функцию – **ТРАНСП, ОК;**
   - ✓ в рабочее поле *Массив* введите диапазон исходной матрицы – A1:B3;
   - ✓ нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER;**
   - ✓ если обратная матрица не появилась, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и еще раз нажать комбинацию клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**.

   В результате должна появиться транспонированная матрица.

3. Найдите произведение $A^T \times B$. Для этого:
   - ✓ выделите блок ячеек под результирующую матрицу (под вектор A^TB).Ее размерность будет $n \times 1$, в данном случае 2 х 1. Например, выделите блок ячеек E4:E5;
   - ✓ с помощью Мастера функций вызовите функцию **МУМНОЖ**, щелкните **ОК**;
   - ✓ в рабочее поле *Массив1* введите диапазон транспонированной матрицы A^T, а в рабочее поле *Массив2* – диапазон матрицы B;
   - ✓ нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**;
   - ✓ если вектор A^TB не появился, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие **CTRL+SHIFT+ENTER**

В результате должен появиться вектор $A^TB = \begin{bmatrix} 190 \\ -177 \end{bmatrix}$

4. Аналогично найдите произведение A^TA:
   - ✓ выделите блок ячеек под результирующую матрицу (ее размерность n x n, т.е. 2 х 2), например, блок ячеек A7:B8;
   - ✓ далее – аналогично п.3, указывая соответствующие диапазоны.

В результате должна появиться матрица A^TA: $\begin{bmatrix} 34 & -5 \\ -5 & 38 \end{bmatrix}$

5. Найдите обратную матрицу $(A^TA)^{-1}$, выделив для нее блок ячеек A10:B11.

Должна появиться матрица $\begin{bmatrix} 0.029992 & 0.003946 \\ 0.003946 & 0.026835 \end{bmatrix}$.

6. Теперь необходимо умножить обратную матрицу $(A^TA)^{-1}$ на вектор A^TB. В итоге получаем вектор X, который равен $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$.